

数学の決闘決勝

2017年10月8日

問題 1. (倉持結さん) 整数の集合 \mathbb{Z} 上の二項演算 $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ で以下の条件を満たすものをすべて求めよ:

任意の $a, b, c \in \mathbb{Z}$ に対して

1. 交換法則: $a * b = b * a$
2. 結合法則: $a * (b * c) = (a * b) * c$
3. $0 * 0 = 0$
4. $(a + c) * (b + c) = (a * b) + c$

問題 2. (*K@ordre_invisible* さん) 数列 A_n を次の漸化式で定める。

$$A_{n+2} = pA_{n+1} + qA_n, \quad A_1 = A_2 = 1 \quad (\text{但し, } p, q \text{ は正の整数。})$$

これに対し、数列 a_n を $a_n = A_n$ の 1 の位の数とする。今、数 a を 10 進展開により $a = 0.a_1a_2a_3 \dots$ と定めるとき、 a は有理数となることを示せ。

問題 3. (倉持結さん) xy -平面 \mathbb{R}^2 上の方眼紙と定規のみで作図可能な点とは、以下の 2 つの操作を有限回行って作図することができる点のことである。

1. 格子点 (x, y 座標がともに整数であるような点) を作図する。
2. すでに作図した点 A, B, C, D ($A \neq B, C \neq D$) に対して、直線 AB と直線 CD がただ一つの交点 P を持つとき、 P を作図する。

このとき、すでに作図された点から 3 点を選んで正三角形を描けるか?