

数学の決闘予選第3セット

2017年10月8日

問題 1. (猫条さん) 以下、 $P_n = \sum_{k=1}^n k$ とする。以下の問いに答えよ。

1. $P_{n+1}^2 - P_n^2$ と $4(P_{n+1}^3 - P_n^3)$ がそれぞれ $(n+1)^2$ の倍数であることを証明せよ。
2. $\sum_{k=1}^n k^5$ を求めよ。

問題 2. (井汲景太さん) p を素数として、 $\frac{1}{p}$ が無限小数になる場合を考えます。

- $\frac{1}{7} = 0.142857142857 \dots = 0.\dot{1}4285\dot{7}$
- $\frac{1}{19} = 0.052631578947368421052631578947 = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$

上の例では循環節はそれぞれ 142857 (長さ 6)、052631578947368421 (長さ 18) です。循環節の長さが 6 の倍数のとき、それを 6 等分したそれぞれを 10 進法の整数と見なして、 a, b, c, d, e, f とします。(上の例では、 $\frac{1}{7}$ に対しては

$$a = 1, b = 4, c = 2, d = 8, e = 5, f = 7$$

で、 $\frac{1}{19}$ に対しては

$$a = 052, b = 631, c = 578, d = 947, e = 368, f = 421$$

です)。このとき、 $a - b + c = -1$ になることを示してください。なお、循環節は最小の長さにとるものとします。例えば $\frac{1}{7}$ で循環節を 12 桁に取ったりはしません。また、 $\frac{1}{p}$ が無限小数になる場合、循環は小数第 1 位から始まることは既知として構いません。

問題 3. (tb_lb さん) 図 1 のように合同な 9^3 個の小立方体から構成される大立方体 S があり、個々の小立方体に以下のような規則で番号を割り当てます。《規則》

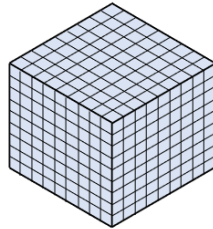


図1

- 上から 1 段目にある 9^2 個の小立方体に、掛け算九九の 1×1 から 9×9 までの値を割り当てる。
- 上から 2 段目にある 9^2 個の小立方体に、1 段目の小立方体に割り当てられた番号の 2 倍の値を割り当てる。
- 同様に上から 3 段目は 1 段目の 3 倍、4 段目は 1 段目の 4 倍、……、9 段目は 1 段目の 9 倍した値をそれぞれ割り当てる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1段目

2	4	6	8	10	12	14	16	18
4	8	12	16	20	24	28	32	36
6	12	18	24	30	36	42	48	54
8	16	24	32	40	48	56	64	72
10	20	30	40	50	60	70	80	90
12	24	36	48	60	72	84	96	108
14	28	42	56	70	84	98	112	126
16	32	48	64	80	96	112	128	144
18	36	54	72	90	108	126	144	162

2段目

……

9	18	27	36	45	54	63	72	81
18	36	54	72	90	108	126	144	162
27	54	81	108	135	162	189	216	243
36	72	108	144	180	216	252	288	324
45	90	135	180	225	270	315	360	405
54	108	162	216	270	324	378	432	486
63	126	189	252	315	378	441	504	567
72	144	216	288	360	432	504	576	648
81	162	243	324	405	486	567	648	729

9段目

さて、図 2 のようにいくつかの小立方体の面を黒く塗ります。そして、これら黒い面から大立方体の反対側の面まで垂直方向に存在する小立方体をすべて取り除きます。取り除いた後に残る新しい立体を S' とします。この立体 S' を構成する小立方体に割り当てられた番号の総和を求めてください。

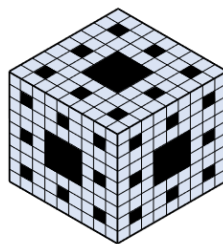


図 2