

数学の決闘 ～日本数学オープン SP～ 決勝

2016/10/05

問題 1. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2016}$ の 1 の位の数字を答えよ。

問題 2. n を正の整数とする。実数から実数への連続関数 f で次の条件を満たすものを考える。

任意の実数 x に対して、 $f^n(x) = -x$ が成り立つ。

ただし、 f^n とは関数 f を n 回合成してできる関数のこととする。

- (1) 関数 f は奇関数であることを示せ。
- (2) n が偶数のとき、関数 f が存在しないことを示せ。

問題 3. 集合 A, B を次のように定義する。

$$A = \{ \lfloor (4 - 2\sqrt{2})n \rfloor \mid n \text{ は正の整数} \},$$
$$B = \{ \lfloor (4 + 2\sqrt{2})n \rfloor \mid n \text{ は正の整数} \}.$$

以下の問いに答えよ。ただし、実数 x に対して、 $\lfloor x \rfloor$ とは x を超えない最大の整数のこととする。

- (1) $A \cap B$ は空集合か？真ならばその証明を、偽ならば反例を与えよ。
- (2) $A \cup B$ に属さない正の整数は存在するか？真ならばその例を、偽ならばその証明を与えよ。